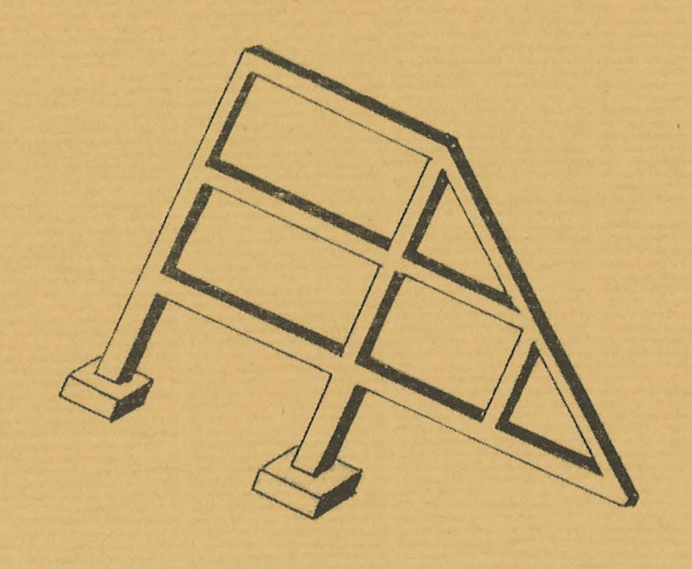
MÉTODOS DE LAS SY Y DE LAS ROTACIONES

DE CÁLCULO DE ESTRUCTURAS

por

JOSÉ MOLINA DOMINGUEZ



CUADERNOS

DEL INSTITUTO

JUAN DE HERRERA

DE LA *ESCUELA DE*

ARQUITECTURA

DE MADRID

1-58-01

MÉTODOS DE LAS SY Y DE LAS ROTACIONES

DE CÁLCULO DE ESTRUCTURAS

por

JOSÉ MOLINA DOMINGUEZ

Dr.Ingeniero de Minas y Arquitecto s.
Ex-profesor titular de la UPM
de Resistencia de Materiales
y Cálculo de Estructuras
en la ETSI de Minas de Madrid

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

1-58-01

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA

0 VARIOS
1 ESTRUCTURAS
2 CONSTRUCCIÓN
3 FÍSICA Y MATEMÁTICAS
4 TEORÍA
5 GEOMETRÍA Y DIBUJO
6 PROYECTOS
7 URBANISMO
8 RESTAURACIÓN

NUEVA NUMERACIÓN

1 Área
58 Autor
01 Ordinal de cuaderno (del autor)

Métodos de las SY y de las rotaciones de cálculo de estructuras.

Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid
Gestión y portada: Laura Bejerano Iglesias
CUADERNO 158.01
ISBN: 84-9728-094-6
Depósito Legal: M-6669-2004

METODO DE LAS SY

El Metodo de Calculo de Estructuras,conocido como de las SY, se basa en la aplicación grafica del Primer Teorema de Castigliano, y en concreto es un procedimiento de calculo distinto de los clasicos,que lo hace no solo independiente,sino que posibilita discernir la importancia de cada una de las acciones,consideradas particularizadas o interconectadas.Su importancia es de tal categoria que en la literatura rusa de estructuras se le atribuye el desarrollo del Metodo al Profesor Vereshagin, aunque en el resto de los paises se le define como el Metodo de las SY,que mas adelante en su explicacion se aclara dicha denominacion.

Para poder comprender plenamente al Metodo,se deben recordar ciertas consideraciones de carácter general de las estructuras.

TRABAJOS EXTERNOS E INTERNOS

Las acciones externas producen,como se sabe, unas deformaciones en las estructuras, que si no se sobrepasa el limite elastico en ninguna seccion , quedan contrarrestadas por las reacciones internas de toda la estructura.

Como en dicho caso se cumple la Ley de Hooke, el trabajo de cada accion viene representado por el area triangular de dicha Ley, y de admitir que todas las acciones colaboran simultaneamente, se puede escribir que el Trabajo Externo vale

$$\mathcal{T}_e = \tfrac{1}{2} \sum P \cdot \delta + \tfrac{1}{2} \sum M \cdot \omega .$$

es decir,que es el sumatorio de los trabajos de sus fuerzas (o pesos) por sus desplazamientos, y de sus momentos por sus giros correspondientes, afectados por el coeficiente ½ de la Ley de Hooke.

Las deformaciones de la estructura produciran momentos,cortantes, esfuerzos normales,y momentos de torsion en todas las secciones, pudiendose escribir de la misma forma

$$\mathcal{T}_i = \tfrac{1}{2}\int M\, d\omega + 1/2 \int N\, d\ell + 1/2 \int T\, d\gamma + 1/2 \int M_t\, d\omega_t$$

El calculo de los desplazamientos elementales se deducen de la ecuacion de la elastica

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d\,tg\,\omega}{dx} \simeq \frac{d\omega}{dx} \doteq -\frac{M}{EI}$$

del modulo de elasticidad longitudinal

$$E = \frac{N/s}{d\ell/ds} \qquad d\ell = \frac{N}{Es}\, ds$$

del modulo de elasticidad transversal

$$G = \frac{T/s}{d\gamma/ds} \qquad d\gamma = \frac{T}{Gs}\, ds$$

y del giro de torsion

$$G = \frac{M_t/J}{d\omega_t/ds} \qquad d\omega_t = \frac{M}{GJ}\, ds$$

y el concepto de integracion es a la actuacion a lo largo de todas las barras de la estructura.El equilibrio de la misma exige que ambos trabajos sean iguales

$$\mathcal{T}e = \mathcal{T}i = \tfrac{1}{2}\int \frac{M^2}{EI}\, ds + 1/2 \int \frac{N^2}{Es}\, ds + \tfrac{1}{2}\int \frac{T^2}{Gs}\, ds + 1/2 \int \frac{M_t^2}{GJ}\, ds$$

TEOREMA DE CASTIGLIANO

Se define diciendo que "La derivada de la energia del sistema con respecto a una accion es el desplazamiento de esta ultima". Para su demostracion se parte de la expresion de la Energia externa en la que se particulariza una accion concreta,que sin perder la generalidad sesupone es la carga Pe.

La expresion de la energia externa sera

$$\mathcal{T}e = \tfrac{1}{2} \sum P.\delta + 1/2 \sum M.\omega + 1/2 \; Pe.\delta e$$

Incrementando la carga Pe se produce el incremento de δe , y de todos los desplazamientos, y como las demas acciones no han sido alteradas,los trabajos de estas no se ven afectados por la reduccion ½ , por lo que el incremento de la energia como consecuencia de dPe vale

$$d\mathcal{T}e = \sum P.d\delta + \sum M.d\omega + Pe.d\delta e + 1/2 \; dPe.\, d\delta e \qquad (1)$$

en el que se ha anadido el termino afectado por ½ porque $d\delta e$ se produce simultaneamente con dPe.

Si por otro lado en la formula de la Energia Externa se calcula la diferencial teniendo en cuenta las variaciones de los deplazamientos con dPe

$$d\tau e = \frac{1}{2} \sum P.d\delta + 1/2 \sum M.d\omega + 1/2 \ \ Pe.d\delta e + 1/2 \ \ dPe.\delta e$$

o lo que es igual al multiplicar por 2

$$2.d\tau e = \sum P.d\delta + \sum M.d\omega + Pe.d\delta e + dPe.\delta e$$

restando de esta expresion la encontrada antes (1) queda

$$d\tau e = dPe.\delta e - \frac{1}{2} dPe.d\delta e$$

y despreciando el producto de las dos diferenciales resulta

$$d\tau e / d Pe = \delta e$$

quedando demostrado el Teorema.

<u>SY</u>

Considerando en una barra en particular de una estructura los efectos hiperestaticos de sus extremos,que los definimos por M y M', el efecto de M en una seccion de su barra a la distancia x de su extremo izquierdo vale deducido de la proporcion

$$\frac{M}{mx} = \frac{L}{L-x} \qquad mx = M(1 - x/L)$$

y de

$$\frac{M'}{m'x} = \frac{L}{x} \qquad m'x = M'(x/L)$$

es decir que en general el momento en una seccion producido por su hiperestatica viene dado por la expresion lineal

$$mx = X\ (a + b.x)$$

con la particularidad de que su derivada respecto a X

$$d\,mx / dX = a + b.x$$

tiene el mismo diagrama que X cuando dicha X vale la unidad.

Aplicando el Teorema de Castigliano, a la expresion de la Energia Interna,que sin perder la generalidad lo hacemos solo al termino de los momentos flectores

$$\mathcal{T}e = \frac{1}{2}\int \frac{M^2}{EI}\, ds$$

por lo que el desplazmiento de una hiperestatica X vale

$$\delta X = \frac{\partial \mathcal{T}e}{\partial X} = \int \frac{M}{EI}\,\frac{dM}{dX}\, ds$$

y sustituyendo $\frac{dM}{dX}$ queda

$$\delta X = \int \frac{M}{EI}(a + b.x)\, ds = a\int \frac{M}{EI}\, ds + b\int \frac{Mx}{EI}\, ds$$

que a su vez se puede poner en la forma

$$\delta X = \int \frac{M}{EI}\, ds \left(a + b\,\frac{\int \frac{Mx}{EI}dx}{\int \frac{M}{EI}dx} \right)$$

Observese que $\frac{\int \frac{Mx}{EI}dx}{\int \frac{M}{EI}dx}$ es la abscisa de centro de gravedad del area $\int \frac{M}{EI}ds$

por lo que

$$X = \int \frac{M}{EI}\, ds\,(a + b\,.\,xg) = S\,.Y$$

en la que S es la expresion de las areas de momentos divididas por EI de toda la estructura ,e

$$Y = a + b\,.\,xg$$

es la ORDENADA del diagrama de momentos para X= 1, correspondiente al centro de gravedad xg, de las areas de momentos expresadas por S.

EQUILIBRIOS EN LA SECCION DE UNA BARRA

Al dar un corte en una seccion de una barra debe de producirse el equilibrio entre los ef ectos de ambos lados del corte.

Al aplicar el Metodo de las SY en ambos lados se obtienen los respectivos desplazamientos,que por las direcciones opuestas para equilibrarse se puede ex presar con los subindices (I para las secciones a izquierda y D para las de derecha)

$$\overrightarrow{u}_I = -\,\overleftarrow{u}_D \qquad \uparrow v_I = -\, v_D \downarrow \qquad \overset{\curvearrowright}{\omega}_I = -\,\overset{\curvearrowleft}{\omega}_D$$

que es lo mismo que las igualdades

$$\overrightarrow{u}_I + \overleftarrow{u}_D = 0 \qquad v_I\!\uparrow + \; v_D\!\downarrow\, = 0 \qquad \overset{\curvearrowright}{\omega}_I + \overset{\curvearrowleft}{\omega}_D = 0$$

que ayudan para calcular los desplazamientos en una seccion cualequiera.Basta encontrar los seis desplazamientos porMetodo, y al expresar las tres ecuaciones ultimas se obtienen las incognitas de los efectos del corte , X Y y M,que sustituidas en los desplazamientos de uno de los lados, se obtendran los verdaderos valorescon solo dividirlos por EI.(Teniendo cuidado con las unidades)

FUERZAS COAXIALES

Si en una estructura se tienen dos fuerzas coaxiales Fa y Fb , la expresion de la Energia sera una funcion de ambas

$$\mathcal{T} = f\ (Fa, Fb)$$

calculando la diferencial $\quad d\mathcal{T} = \dfrac{\partial f}{\partial Fa}\, d\,Fa + \dfrac{\partial f}{\partial Fb}\, d\,Fb$

se observa que por el Teorema de Castigliano

$$\frac{\partial f}{\partial Fa} = d\,Fa \qquad y \qquad \frac{\partial f}{\partial Fb} = d\,Fb$$

son los desplazamientos de Fa y Fb. Si ambas fuerzas fuesen iguales en valor abso-

luto ,pero de direccion contraria

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial F} = (dFa \ + dFb \ )$$

y si a su vez estan aplicadas en una misma barra (o cable) ,la separacion de ambas fuerzas seria cero,asi como su desplazamiento. Ello justifica que se puede aplicar el Metodo cortando la barra (o el cable) por cualquier seccion y expresar SY=0.

BARRAS SUPERFLUAS Y RESTANTES ACCIONES

Es el caso de estructuras reforzadas por cables,como se ha explicado, o de barras que por su naturaleza no trabajan a flexion ,o interesa conocer la importancia de otras acciones (esfuerzos normales,tangenciales o torsiones).Se puede aplicar perfectamente el Metodo,porque como se explico, solamente en la expresion de la Energia se tomo el termino de flexion,aunque en realidad existen los de las otras acciones.Se debe advertir no obstante que los diagramas al ser de distinta naturaleza no se deben mezclar, y los respectivos productos se deben dividir por EI ,en la flexion, por ES ,en esfuerzos normales, por GS , en los tangenciales y por GJ en las torsiones.

PROBLEMAS QUE RESUELVE EL METODO

Teniendo presente que el Metodo lo que hace encontrar desplazamientos, puede resolver los siguientes problemas:

1) Calcula Hiperestaticas ,si se conocen los desplazamientos,normalmente cero.
2) Calcula desplazamientos y giros en una seccion,pudiendo ser aquellos de una direccion prefijada
3) Determinacion de efectos en una seccion, por la compatibilidad de desplazamientos
4) Estructuras con barras superabundantes

y 5) Actuacion de acciones diferentes a las flexiones.

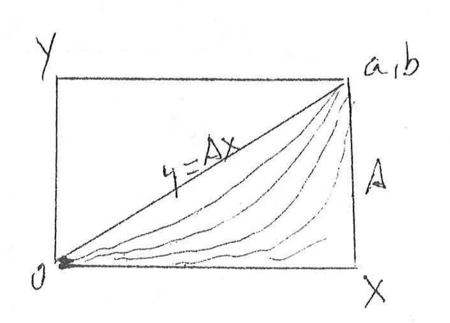
PROPIEDADES DE LA PARABOLA DE GRADO N

Para aplicación del Metodo de las SY son necesarias las determinaciones de unas areas,buscar sus centros de gravedad ,y por las abscisas de estos, encontrar las ordenadas del efecto unitario colocado en lugar de la hiperestatica.

Como los diagramas que se utilizan tanto en los momentos hiperestaticos , como en cortantes,efectos normales ,o en momentos de torsion son lineales,de grado dos, y a lo sumo de grado tres,resulta muy comodo estudiar las propiedades de la parabola de grado n, que abarca todos los casos posibles.(La demostracion que sigue fue desarrollada por D.Jose Manuel Molina Sanchez, quien amablemente nos autoriza su inclusion.)

Asi, sea la parabola generica de grado n

$$y = A . x^{n}$$



que suponemos pasa por el punto de coordenadas (a,b)

$$b = A.\ a^{n}$$

que se aprecia que para n = 0 y = A recta paralela a OX

para n = 1 y = Ax recta que define un triangulo

para n = 2 y = A x parabola de grado 2

etc.etc.

El area de la parabola generica sera

$$(A) = \int_0^a A . x^n\, dx = \left(\frac{Ax^{n+1}}{n+1}\right)_0^a = \frac{A a^{n+1}}{n+1} = \boxed{\frac{a.b}{n+1}}$$

formula que nos da las evidencias

para n = 0 Area del rectangulo = a..b

para n = 1 Area del triangulo = a . b /2

para n = 2 Area de la parabola grado 2= a . b /3

etc.etc.

La abscisa del centro de gravedad de la misma parabola generica sera

$$xg = \frac{\int_0^a yx\,dx}{\int_0^a y\,dx} = \frac{\int_0^a Ax^{n+1}dx}{\frac{ab}{n+1}} = \frac{n+1}{ab}\, A\, \frac{a^{n+2}}{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\, \frac{a^2 b}{ab} = \frac{n+1}{n+2}\, a$$

$$y \quad x'g = a - xg = \frac{n+2-(n+1)}{n+2}\, a = \boxed{\frac{a}{n+2}}$$

que nos expresa las abscisas del centro de gravedad medidas desde el extremo derecho. Asi

para n = 0 x'g = del rectangulo a.b = a / 2

para n = 1 x'g = del triangulo a. b/2 = a / 3

para n = 2 . x'g = de parabola grado 2 = a / 4

etc.etc.

Aunque no son necesarias en el Metodo,las ordenadas de los centros de gravedad ni las areas de las zonas complementarias de las calculadas,se incluyen no obstante

$$y\,a = \frac{\int_0^a \frac{y^2}{2} dx}{\int_0^a y\, dx} = \frac{\frac{A^2}{2}\int_0^a x^{2n} dx}{\frac{ab}{n+1}} = \frac{A^2 a^{2n+1}(n+1)}{2(2n+1)\,ab} = \frac{b(n+1)}{2(2n+1)}$$

Asi para n = 1 y a = b / 3

n = 2 y a = 3b /10

n = 3 y a = 2b /7 etc etc.

Zonas complementarias (B)

$$\text{Area } (B) = a.b - \frac{ab}{n+1} = \frac{nab}{n+1}$$

que para n = 0 Area = 0

n = 1 Area triangulo = a.b/2

n = 2 Area complementaria parabola = 2.a.b/3 etc.etc.

$$xg = \frac{\frac{ab}{2}a - \frac{ab}{n+1}\,\frac{a(n+1)}{n+2}}{\frac{nab}{n+1}} = \frac{a(n+1)}{2(n+2)} = xg\,(A)/2$$

$$yg = \frac{1}{\frac{nab}{n+1}}\left(a.b.b/2 - \frac{ab^2(n+1)}{(n+1)\,2\,(2n+1)}\right) = \frac{(n+1)\,b}{2n+1}$$

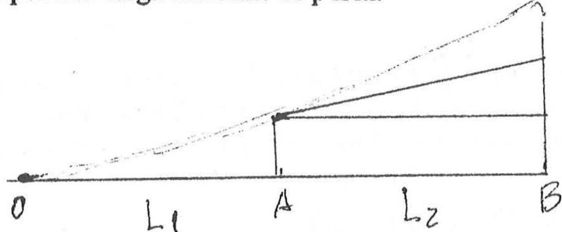
que para n = 0 y b = b/2

n = 1 yb = 2b/3

n = 2 yb = 3b/5 etc.etc,.

PARTICION DE UNA PARABOLA EN VARIAS AREAS

Por la importancia en la aplicacion del Metodo de las SY, estudiemos la particion de una parabola de grado dos,al considerar dividida su longitud en dos partes. Supongamos que la parabola esta poducida por una carga uniforme de p k/m.



El valor en el punto A es $y_A = \dfrac{pL_1^2}{2}$

y en el punto B $y_B = \dfrac{p(L_1+L_2)^2}{2} = \dfrac{pL_1^2}{2} + (p.L_1)L_2 + \dfrac{pL_2^2}{2}$

es decir , el area de la zona AB es la suma de un rectangulo de longitud L_2 y altura $\dfrac{pL_1^2}{2}$, de un triangulo de base L_2 y altura en B = $p.L_1 \cdot L_2$ (la carga del vano L_1 por distancia L_2) y una parabola de grado dos correspondiente al peso uniforme p en el vano L_2 .

Si extendemos el concepto a la parabola de grado tres (como es el caso del diagrama de momentos de una carga uniformemente creciente de 0 a p en una viga)

$$\frac{p}{L} = \frac{q}{x} \qquad q = \frac{px}{L}$$

$$Mx = \frac{qx}{2}\,\frac{x}{3} = \frac{px^3}{6L}$$

por lo que en A $Ma = \dfrac{pL_1^3}{6L}$

y en B $Mb = \dfrac{p(L_1+L_2)^3}{6(L_1+L_2)} = \dfrac{p(L_1+L_2)^2}{6} = \dfrac{pL_1^2}{6} + \dfrac{pL_1}{3}.L_2 + \dfrac{pL_2^2}{6}$

Observese que $\dfrac{pL_1}{3}$ es el area de la zona parabolica de OA ,por lo que el tramo AB se compone tambien de un rectangulo, de un triangulo y de otra parabola (de carga variable entre A y B).

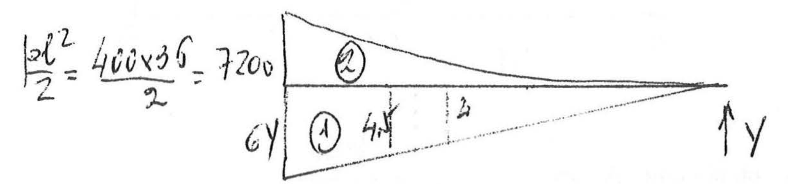
Ejemplo nº 1 por SY.

Sead la estructura adjunta en la que $E=2.10^6$ K/cm^2 e $I=800$ cm^4, y se pide determinar la reacción y el giro en B, y el giro y el desplazamiento vertical en A.

A $p=400$ k/m.

2m 4m B

Solución: La estructura se hace isostática, poniendo como incognita Y, la reacción vertical en B. De esa manera se tienen los diagramas de momentos adjuntos



Las áreas de momentos valen $(1)=\frac{18Y}{EI}$ $(2)=\frac{14400}{EI}$

Los dentros de gravedad estan

en el área 1 a 2 m. del empotramiento
en el área 2 a 1.5 m. del empotramiento

y midiendo las respectivas ordenadas en el diagrama de Y=1 (no hace falta dibujarlo teniendo el de Y) dan $y=4$ e $y=-4.5$ por lo que

$$SY=\frac{18Y}{EI}.4-\frac{14400}{EI}.4.5=0$$

que supone expresar que el desplazamiento de $Y=0$.

El signo negativo del término numérico es consecuencia de tener el área 2 distinto signo que el correspondiente a Y=1 y por ello el valor de la ordenada es -4.5. De la ecuación anterior se deduce

$$Y=\frac{14400\times4.5}{18\times4}=900\text{ k.}$$ $M=7200-900\times6=-1800$ mk

Para determinar el giro en A, aplicamos sobre la estructura dada, sin cargas, el momento 1 en A. Aunque se sabe que se transmite al empotramiento en valor la mitad se va comprobar utilizando el Método:

$6Y_1$ 4 3 1 Y_1

Areaº	S	y($Y_1=1$)
3	3/EI	-2
4	18Y/EI	4

$$SY=-\frac{6}{EI}+\frac{72Y}{EI}=0$$

$$Y=1/12$$

Momento en el empotramiento = 6 x Y= 0,5

Teniendo en cuenta las áreas anteriormente calculadas, y midiendo ahora las ordenadas en el diagrama de Y_1 quedan

nº	S	$y(Y_1=1)$
1	$\frac{18Y}{EI}=\frac{16200}{EI}$	$4-\frac{1}{3}=\frac{11}{3}$
2	$\frac{14400}{EI}$	$-4.5+0,25=-4.25$

$$SY = \frac{59400-61200}{EI} = -\frac{1800}{EI}$$

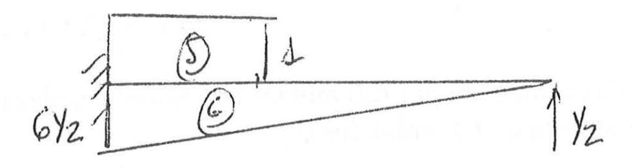
Como 1800 son $m^2.k = 18000000\ cm^2.k$

y $EI = 2.10^6\ k/cm^2 \times 800\ cm^4 = 1600.10^6\ cm^2.k$

queda
$$SY = \omega_A = -\frac{18.\ 10^6}{1600.10^6} = -0.01125 \text{ radianes} = -0º38'40''48$$

el signo negativo quiere decir que el giro es sinistrorsum.

Para el giro en A, se procederá como antes aplicando un momento unidad, pero ahora en la sección A, por lo que

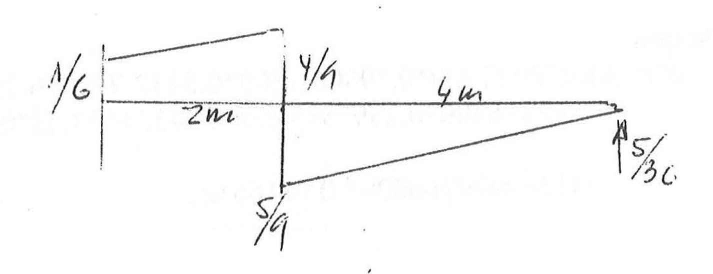


nº	S	$y(Y_2=1)$
5	$\frac{2}{EI}$	-5
6	$\frac{18Y_2}{EI}$	4

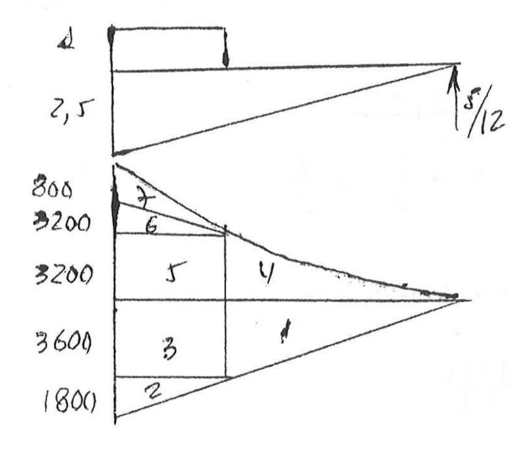
$$SY = \frac{-10}{EI} + \frac{72Y_2}{EI} = 0$$

de donde $Y_2 = \frac{5}{36}$

y al sustituir en el último diagrama se convierte en



aunque es preferible utilizar los diagramas que siguen porque es mas facil medir las ordenadas,por lo que quedan,por diferencias las y



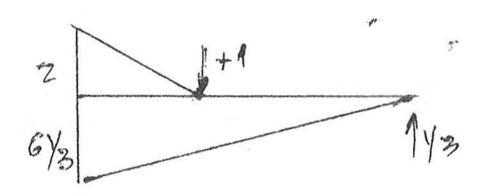
num.	S	y(=1)
1	7200	1,1111
2	1800	1,2222
3	7200	1.08333
4	4266.66	-1,25
5	6400	-1,08333
6	3200	-1.22222
7	533.333	-1.29166

de donde =(7200*1.11+1800*1.22+7200*1.083-4266.66*1.25-6400*1.0833-3200*1.2222-533.33*1.29166)/EI=

= 1133.3/160000=0,007083 rad.= 0 0' 25.5''

giro a derecha por ser positivo.

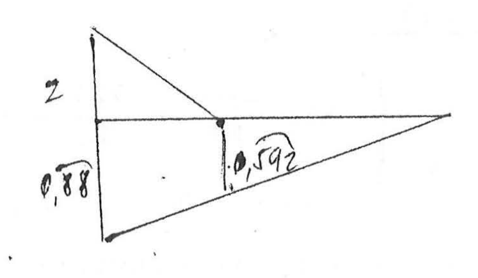
para el desplazamiento en A se aplica la carga +1 en dicha seccion y encontramos como diagrama en donde calculamos por SY la reaccion en 2



num	S	y3=1
8	2	-16/3
9	18y3	4

SY=- 32/3 +72Y3=0 Y3=4/27

que da el diagrama para por diferencias obtener el desplazamiento de A (ponemos al final el denominador EI)



num	S	Y3=1
1	7200	0.39506173
2	1800	-0.54320987
3	7200	-0.25925925
4	4266.6	-0.444444
5	6400	0.25925925
6	3200	0.54320987
7	533.33	0.68518518

por lo que

d(en A)=SY= (7200*0.39506-1800*0.5432-7200*0.25925-4266.66*0.444+6400*0.25925+3200*0.5432+533.33*0.68518)/EI=

=1866.666/160000= 0.01166 m.,

EJERCICIO Nº 2.

Determinar el diagrama de momentos en la estructura con peso propio de 300 K/M.

Solución: Expresando las incognitas de la rótula (X,Y) y considerando entonces el problema como un voladizo se tienen los diagramas de momentos

que dan las áreas y ordenadas:

Nº	S	y(X=1)	y(Y=1)
1	2X	4/3	2
2	10X	2	4.5
3	2Y	0	4/3
4	4Y	1	2
5	10Y	2	4.5
6	12.5	2	16/3
7	400	0	-1.5
8	1200	-1	-2
9	3000	-2	-4.5
10	21250	-2	-16/3
11	6250	-2	-5.75

Qque dan el sistema

$$22.6666\,X + 49\,Y = 62200$$
$$49\,X + 122.333\,Y = 165770.9$$

cuya solución es X= -1381.16 K Y= 1908.29 K

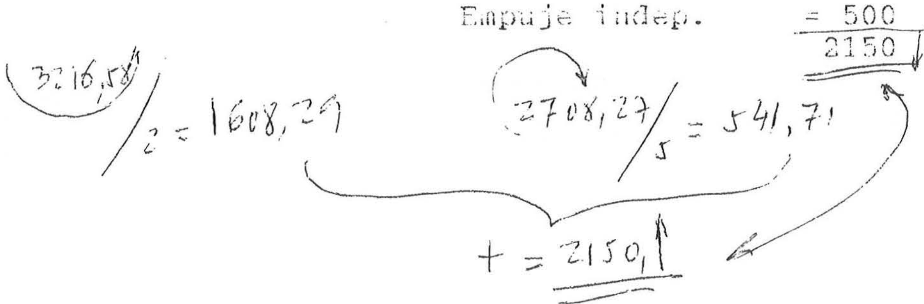
sustituyendo estos valores en sus diagramas y sumandolos queda

Empuje isostático en barra vertical =(1+2+2.5)*300=1650

Empuje indep. = 500

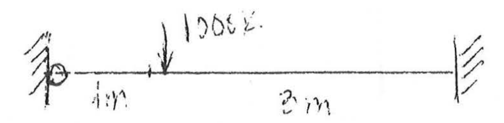
2150

OK

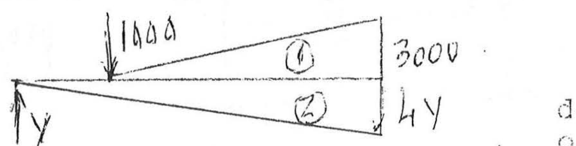


EJERCICIO nº3

Calcular el giro en la rótula y el desplazamiento vertical en el punto A, sabiendo E= 2.10^6 k/cm2 e I=900 cm4



Solución: El problema al ser hiperestático de primer grado(una incognita vertical en la rótula,y reacción vertical y momento en el empotramiento, para sólo dos ecuaciones V=0 y M=0), se resuelve primeramente dicha hiperestaticidad expresando como incognita el cortante en la rótula, cuyo desplazamiento es cero. Así aplicando SY se tiene

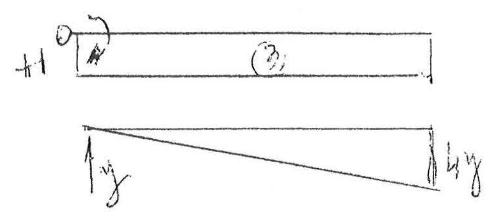


Nº	S	y(Y=1)
1	450	-3
2	8Y	8/3

de donde 64Y/3 - 13500

o sea Y = 632.8125 k.

Aplicando el momento 1 en la rótula resolvemos igualmente la hiperestaticidad con las áreas

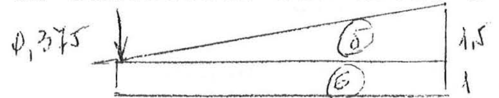


Nº	S	y(Y=1)
3	4	2
4	8Y	8/3

de donde 64Y/3 = -8

Y= -0.375 k.

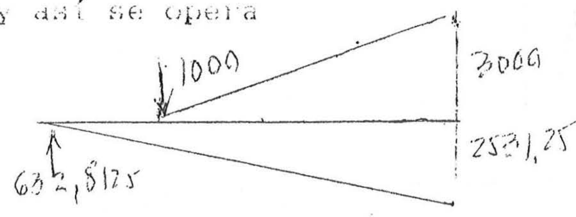
y al sustituir dichos valores en su diagrama y considerar el de +1 que para mejor operar no los sumamos, determinamos el giro de la rótula al considerar las areas 1 y 2 con las ordenadas medidas en 5 y 6

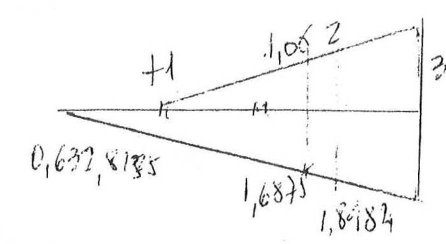


Nº	S	y(Y=1)
1	4500/EI	1.125-1
2	8x632.8125/EI	1-2*1.5/3

o sea O= 562.5 kxm2/EI kxcm2=562.5x10^4/2x900x10^6=0.003125 radianes= = 0º 0' 11'' 25

Para determinar el desplazamiento vertical en A, aplicamos la carga +1 en A, y el resultado da los mismos números del primer diagrama divididos por 1000 y así se opera





Nº	S	y(Y=1)
1	4500/EI	2 1.8984375
2	5062.5/EI	1.6875-1.666

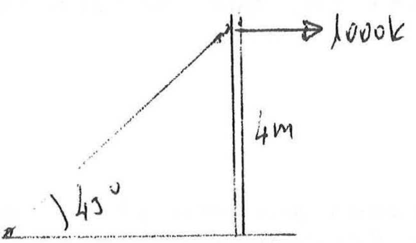
= 562.503375x10^6/1800x10^5=

= 0.3125 cm.

Ejercicio nº 4 Por SY

Calcular la fuerza que se produce en el tirante de la estructura adjunta, teniendo en cuenta no solo los efectos de flexión, sino los de esfuerzos normales en el tirante y en el poste, y el de cortantes en éste último, con los datos siguientes : Poste es un perfil H, con valores A=65.3 cm2, p=51,2 k/m I_x=3831 cm^4, Tirante = 1 ø 2cm = A=3.1416 cm2 . Para ambos E=2.10^6 k/cm2 G= 7,7 .10^5 k/cm2

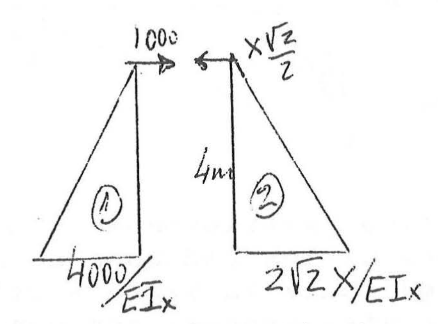
Solución: Dando un corte por el tirante para expresar la fuerza con que trabaja ,X, se producen los diagramas siguientes

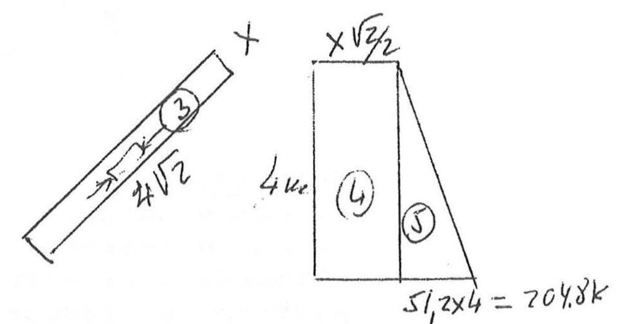


$\frac{X\sqrt{2}}{2}$ 1000k X $\frac{X\sqrt{2}}{2}$ X

Diagramas de momentos

Diagramas de esfuerzos normales





Diagramas de cortantes

De los que se deducen para el Método

1000 $X\sqrt{2}/2$ 6 4m 7 1000

nº	S	y(X=1)
1	$8000/EI_x$	$-4\sqrt{2}/3$
2	$4\sqrt{2}X/EI_x$	$4\sqrt{2}/3$
3	$4\sqrt{2}X/E.3,14$	1
4	$2\sqrt{2}X/E.65,3$	$\sqrt{2}/2$
5	$409,6/E.65,3$	$\sqrt{2}/2$
6	$4000/G.65,3$	$-\sqrt{2}/2$
7	$2\sqrt{2}X/G.65,3$	$\sqrt{2}/2$

$$SY=\left(-\frac{32000\sqrt{2}}{3EI_x}+\frac{32X}{3EI_x}\right)+\left(\frac{4\sqrt{2}\,X}{3,14.E}\right)+\left(\frac{2X\quad 204,8\ 2}{65,3\ E}\right)+\left(\frac{2X-2000\ 2}{65,3\ G}\right)=$$

Si se tiene sólo en cuenta los términos que afectan a la flexión y al esfuerzo normal del tirante

X = 1328,31 K

si se considera además el efecto normal en el poste

X= 1326,79 K

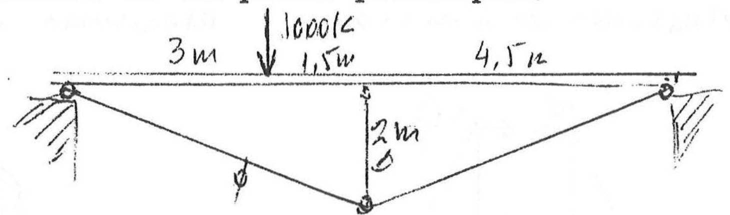
y si se añade el efecto tangencial del poste

X= 1327,02 K

lo que demuestra que en la práctica es sufibiente considerar los efectos de flexión, que incluso son más conservadores.

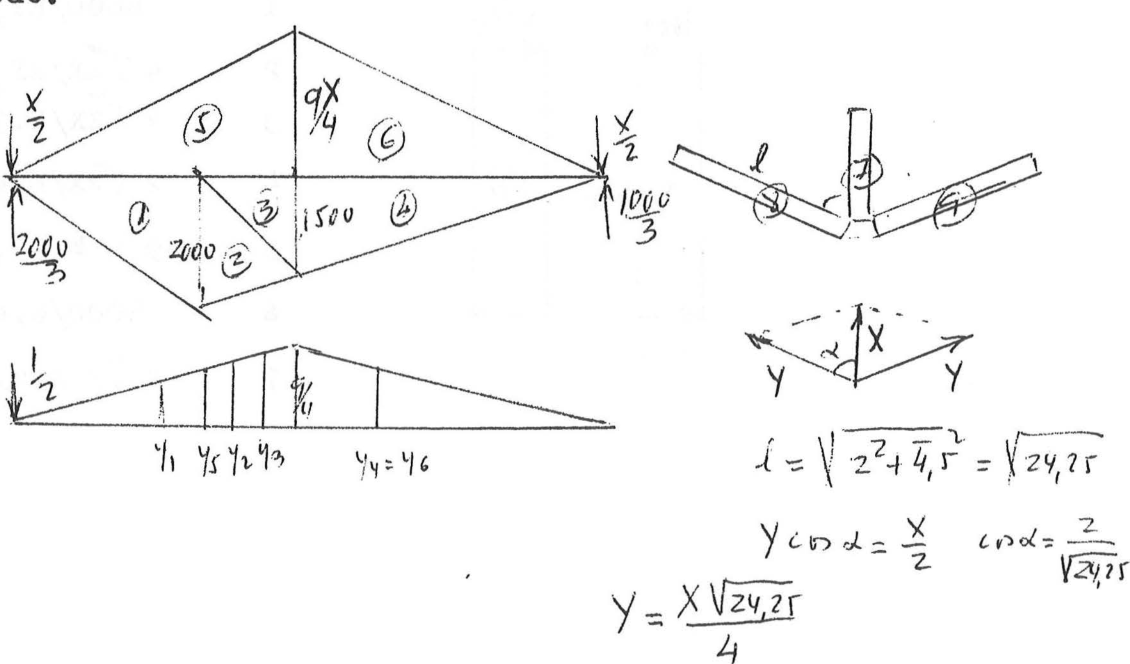
Ejercicio nº 5

Una estructura está formada por una pieza de momento de inercia I = 1000 cm4, reforzada por redondos de 2 cm2 de sección según el dibujo adjunto. Se pide dibujar el diagrama de momentos de la pieza principal.



Solución

La estructura es isostática exteriormente e hiperestática en su interior a causa de los redondos de refuerzo. Llamando X al esfuerzo que hace la barra vertical, el problema se reduce a una viga apoyada con dos cargas 1000 k, y X. Aplicando a los diagramas de momentos juntos con los de tracción y de compresión de las barras de refuerzo, se puede aplicar el cálculo de la separación relativa de dos secciones contiguas, utilizando el Método.



Así se tienen

nº	S	y (X=1)
1	$\frac{3000}{EI}$	-1
2	$\frac{1500}{EI}$	-1.75
3	$\frac{1125}{EI}$	-2
4	$\frac{3375}{EI}$	-1.5
5	$\frac{81X}{16EI}$	1.5
6	$\frac{81X}{16EI}$	1.5
7	$\frac{2X}{ES}$	1
8 = 9	$\frac{24.25X}{4ES}$	$\frac{\sqrt{24.25}}{4}$

Efectuando SY = 0 se tiene

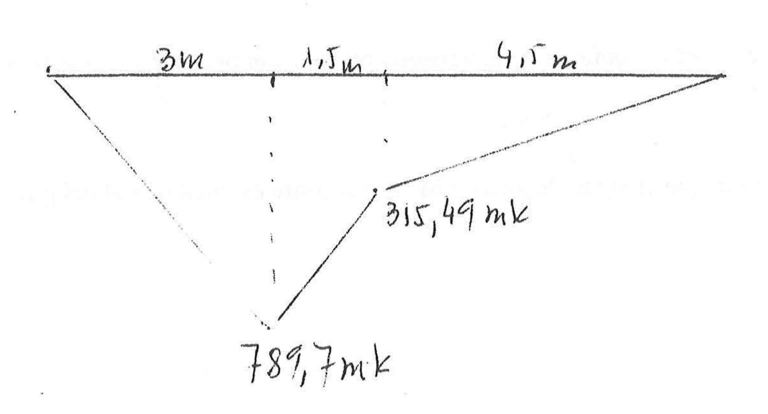
$$\left(-3000 - 2625 - 2250 - 5062.5 + \frac{243\,X}{16}\right)/EI + \left(2 + \frac{(24.25)^{\frac{3}{2}}}{16}\right)X/ES =$$

es decir como $\frac{I}{S} = \frac{1000 \times 10^{-8}\, m^4}{2 \times 10^{-4}\, m^2} = 0{,}05$

queda $-12937.5 + X\left(\frac{243}{16} + 0{,}1 + 0.373179\right) = 0$

$X = 826.11$ k.

y sustituyendo en su diagrama queda para la pieza princi pal



METODO DE LAS ROTACIONES

Consiste este Metodo de Calculo de Estructuras en determinar los desplazamientos de los extremos de las barras,tanto giros como traslaciones,en funcion de los datos de las barras y de las hipótesis de cargas.

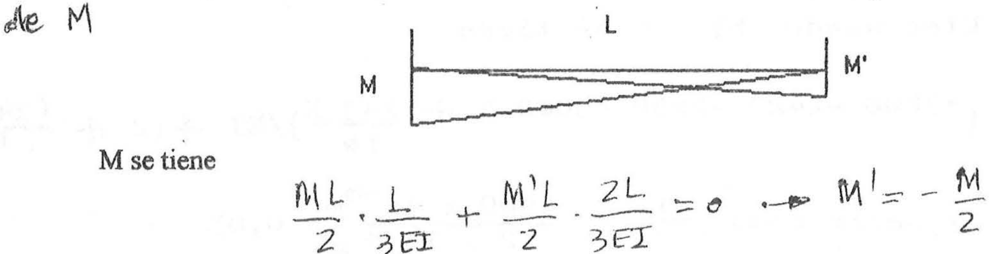
En primer lugar conviene tener en cuenta unos conceptos que también se tienen se utilizan en el Metodo de Cross, como son la Rigidez de la barra y el Coeficiente de transmisión de los momentos de un extremo al opuesto de la misma.

Repetiremos la demostración de los mismos:

Rigidez- Se denomina rigidez de una barra a la relacion entre el momento que actua en el extremo apoyado de una barra,empotrada en el otro,y el angulo que gira.

Para la demostracion de dichos conceptos se necesitan utilizar los dos primeros Teoremas de Mohr,ellos se suponen conocidos.

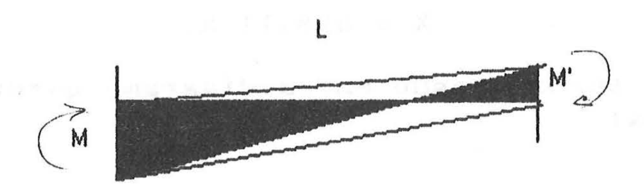
Coeficiente de Transmision de un momento a traves de una barra ,que se aplica en un extremo apoyado y se transmite asu otro extremo empotrado.Para ello supongamos que el momento que llega al extremo empotrado sea M' .La barra,esta sometida a este y al aplicado en el otro extremo M, que dan sus respectivos diagramas dibujados. Aplicando el segundo Teorema de Mohr, al tomar momentos estaticos de las areas de momentos respecto al extremo de M



M se tiene

$$\frac{ML}{2}\cdot\frac{L}{3EI}+\frac{M'L}{2}\cdot\frac{2L}{3EI}=0 \rightarrow M'=-\frac{M}{2}$$

resultando por lo tanto el diagrama corregido siguiente, ya que el signo menos expresa que el diagrama de M' esta en distinto lado de la barra que el de M.

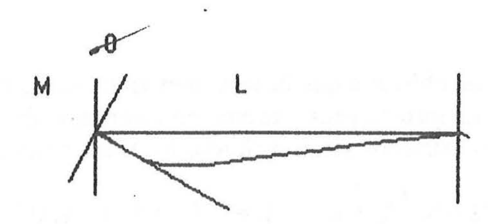


y siguiendo a Cross al coeficiente de transmision se le denomina β y queda como valor

$$\beta = ½$$

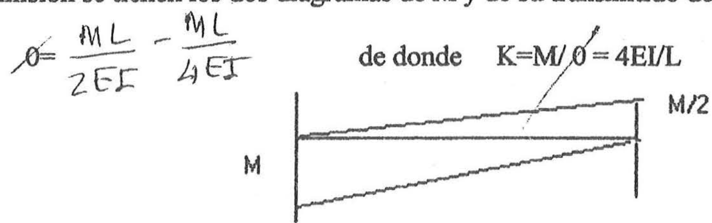
haciendonos ver que el signo de giro de M' fisicamente es igual que el del giro de M.

Rigidez de una Barra, que se supone apoyada en el extremo en que se aplica el momento M,y en dicho apoyo se produce el giro θ,estando el otro extremo empotrado

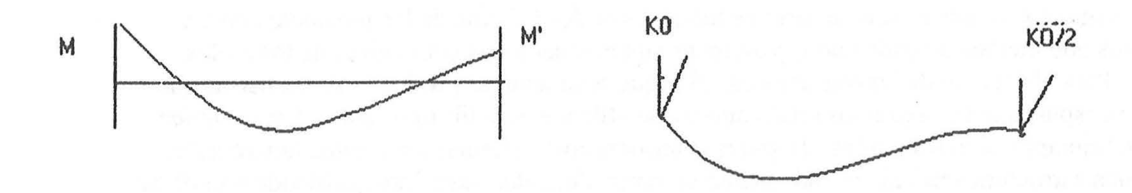


Por el Primer Teorema de Mohr,el angulo θ,que gira es igual al de las tangentes en ambos extremos de la elastica y que afecta a todo el diagrama de momentos,pero por el coeficiente de transmision se tienen los dos diagramas de M y de su transmitido de valor M/2,por lo que

$$\theta = \frac{ML}{2EI} - \frac{ML}{4EI}$$ de donde $K=M/\theta = 4EI/L$



METODO DE LAS ROTACIONES = Supongamos una barra perfectamente empotrada en sus extremos y cargada con una hipotesis de carga, que produce a su vez unos momentos de empotramiento perfecto M y M' en sus extremos izquierdo y derecho.



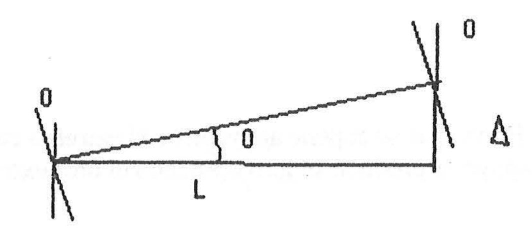
Si se gira el extremo izquierdo un angulo θ ,los momentos M y M' ,quedan alterados (este por el coeficiente de transmision) y se convierten en

$$M + K\theta \qquad M' + \frac{K\theta}{2}$$

Aplicando otro giro θ' ,en el extremo derecho se producira ahora el a cambio a

$$M + K\theta + \frac{K\theta'}{2} \qquad M' + \frac{K\theta}{2} + K\theta'$$

Y por ultimo si se trasladan relativamente los extremos una magnitud se producira



un giro de la barra /L ,y de obligar a que la secciones empotradas de la barra manten- su posicion inicial,ello supone un giro en cada extremo de valor también de /L ,por lo los momentos resultantes en los extremos seran incluidos los transmitidos

$$M = M + K\theta + K\theta'/2 + K\Delta/L + K\Delta/2L = M + K\theta + K\theta'/2 + 3K\Delta/2L$$

$$M' = M' + K\theta' + K\theta/2 + K\Delta/L + K\Delta/2L = M' + K\theta' + K\theta/2 + 3K\Delta/2L$$

que son las formulas a aplicar en el Metodo.

<u>Modo de Operar</u>

De aplicar las formulas deducidas para cada extremo de todas las barras,se aprecia que a priori solo se conocen los momentos de empotramiento perfecto iniciales, de acuerdo con las hipotesis de carga de cada barra,asi como los coeficientes K y las longitudes L.

Por lo tanto son incognitas los giros de los nudos,y los desplazamientos relativos, que si se dividen estos por las longitudes de sus barras dan los giros de rotacion de dichas barras.(Se explica asi la denominacion del Metodo=Giros de nudos y giros de barras).

Teniendo todas las ecuaciones de los momentos en los extremos de todas las barras es suficiente con expresar el equilibrio de todos los nudos (Suma de los momentos de los extremos que inciden en cada nudo) para tener tantas ecuaciones como giros de los nudos.

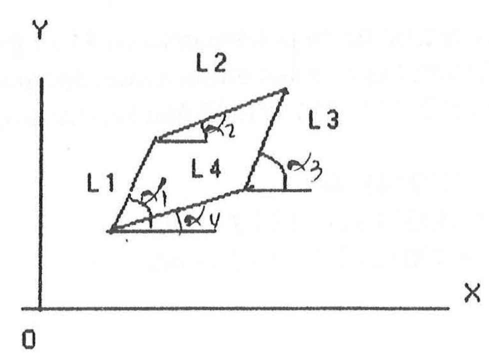
Para el Calculo de las traslaciones Δ ,que solamente se producen en las barras que pueden desplazarse sus extremos relativamente,se utiliza el equilibrio de estos desplazamien- tos: por ejemplo, si existen unos empujes exteriores,como pueden ser vientos horizontales sobre una estructura vertical, en cada planta se veran afectados sus pilares,debiendo equilibrar- dichos empujes con el efecto contrario que produzcan los momentos de los extremos de los pilares en dicha planta, y asi se obtendrian las ecuaciones para determinar las traslaciones.

Conocidas las incognitas es suficiente sustituirlas en las ecuaciones M y M' de todas las barras para tener conocidos los referidos momentos y poder dibujar el diagrama de momentos de la estructura.

El calculo de las traslaciones no siempre es tan facil de encontrar porque hay estructuras en que puede dudarse como se producen los empujes y sobre todo como actuan sobre ciertas barras, para indicar sus traslaciones.Para ayudarse en lo posible se puede utilizar el Teorema de las Proyecciones.

Teorema de las Proyecciones

Supongamos un poligono cerrado de n lados (se ha dibujado solo de cuatro),que forma cada lado un angulo α con el eje horizontal OX.



Por ser cerrado se puede escribir

$$\sum L_i \cdot \cos\alpha_i = 0$$
$$\sum L_i \cdot \operatorname{sen}\alpha_i = 0 \quad (1)$$

es decir que la suma de sus proyecciones,dandole sentido a las mismas es cero.Si se cargase el poligono con una hipotesis de carga,se deformaria incrementandose o reduciendose los angulos en valores muy pequeños,pero a pesar de ello el poligono se mantendria cerrado y podria entonces escribirse tambien

$$\sum L_i \cos(\alpha_i + \Delta\alpha_i) = \sum L_i \cos\alpha_i \cos\Delta\alpha_i - \sum L_i \operatorname{sen}\alpha_i \operatorname{sen}\Delta\alpha_i = 0$$
$$\sum L_i \operatorname{sen}(\alpha_i + \Delta\alpha_i) = \sum L_i \operatorname{sen}\alpha_i \cos\Delta\alpha_i + \sum L_i \cos\alpha_i \operatorname{sen}\Delta\alpha_i = 0$$

Al ser los incrementos pequeños se pueden sustituir por

$\cos\Delta\alpha_i = 1$ y $\operatorname{sen}\Delta\alpha_i = \Delta\alpha_i$

quedando las formulas

$$\sum L_i \cos\alpha_i - \sum L_i \operatorname{sen}\alpha_i \cdot \Delta\alpha_i = 0$$
$$\sum L_i \operatorname{sen}\alpha_i + \sum L_i \cos\alpha_i \cdot \Delta\alpha_i = 0$$

que por las (1) se reducen a

$$\sum L_i \operatorname{sen}\alpha_i \; \Delta\alpha_i = 0$$
$$\sum L_i \cos\alpha_i \; \Delta\alpha_i = 0$$

Pero observese que $L_i \operatorname{sen}\alpha_i = L_{iy}$

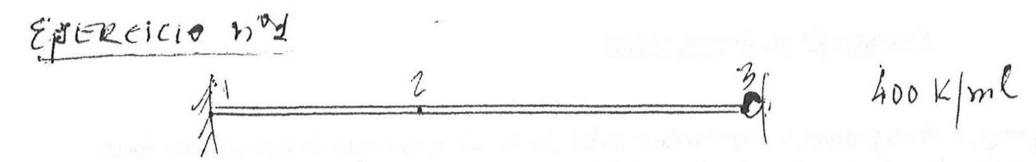
y $L_i \cos\alpha_i = L_{ix}$

son las proyecciones de las barra respecto a los eje coordenados,ANTES DE SUFRIR LA TRANSFORMACION por las cargas aplicadas,quedando como formulas practicas:

$$\sum L_{ix} \cdot \Delta\alpha_i = 0$$
$$\sum L_{iy} \cdot \Delta\alpha_i = 0$$

Por Rotaciones

Ejercicio nº 1



En este ejercicio se pedia el momento de empotramiento en 1) ,el giro en la rotula y el giro y el desplazamiento en 2).Para lograr estos ultimos,supongamos que el punto 2) es un nudo.Con EI=16*10^6 k*cm^2=16*10^4 k*m^2 que suponemos esta inclui-do en las incognitas se tiene:

K12=4EI/2= 2 K23=4EI/4= 1

En vano 12 pl^2/12= 400*4/12= 133.333 mk.

" 23 = 400*16/12=533.333 mk.

M12= -133.333 + Ø2—(3/2)*D/2= --133.333 + Ø2 –1.5 D
M21= 133.333+2*Ø2—1.5 D
M23= - 533.333+Ø2+0.5*Ø3+(3/2)*1*D/4= --533.333+Ø2+Ø3/2+0.375*D
M32= 533.333+0.5*Ø2+Ø3+0.375*D
Equilibrio de Nudos=

M21+M23= -400 +3*Ø2+0.5*Ø3—1.125*D=0

M32= 533.333+0.5*Ø2+Ø3+0.375*D=0

Empuje=
1200 + (M12+M21)/2 –(M23+M32)/4=1200+1.125*Ø2-0.375*Ø3-1.6875*D=0

por lo que queda el sistema:

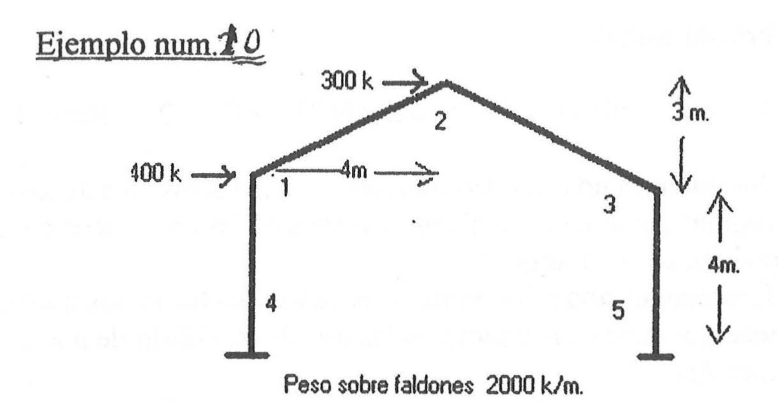
EIØ2	EIØ3	EID		Independiente
3	0.5	-1.125	=	400
0.5	1	0.375	=	-533.333
-1.125	0.375	1.6875	=	1200

- que resuelto da

EIØ2= 1133.333 mk Ø2=0.00708333 rad.=0'25.5''
EIØ3=-1800 mk. Ø3=-0.01125 rad.= 38'40.48''
EI D = 1866.66mk D = 0.0116 m.
M12= -133.333+EIØ2—1.5*EID=-133.333+1133.333-1.5*1866.66=-1800mk.

Observese que el haber considerado como un nudo al punto 2) el ejercicio es mas rapido por este Metodo que por el de las SY,pero ello no niega las ventajas de este cuando se conocen los desplazamientos,si ademas son cero.

Ejemplo num.10



Sea el Portico a dos aguas adjunto,cargado en los faldones por 2000 k/m y empujes en los nudos 1 y 2,de 400 k y 300 k.respectivamente.

Las cargas perpendiculares sobre los faldones seran

$$q = 2000 \times 4/5 = 1600 \text{ k/m.faldon}$$

Momentos de empotramiento perfecto = $(-- +)\,1600 \times 25/12 = (-- +)\,3333.3333$ mk.

Rigideces $K12 = K23 = 4EI/5 = 0.8$ $\quad K14 = K35 = 4EI/4 = 1$

Los nudos que pueden girar y que daran tres incognitas son el 1,2 y 3.

Los empujes a priori no explican cuantas traslaciones se producen en las barras,por lo que utilizamos el Teorema de las Proyecciones:

Verticalmente $\quad 4\,\alpha 14 + 3\,\alpha 12 - 3\,\alpha 23 -- 4\,\alpha 35 = 0$

Horizontalmente $\quad 0\,\alpha 14 + 4\,\alpha 12 + 4\,\alpha 23 + 0\,\alpha 35 = 0$

Si $\Delta 12 = 5\,\alpha 12 \quad \Delta 23 = 5\,\alpha 23 \quad \Delta 14 = 4\,\alpha 14$ y $\Delta 35 = 4\,\alpha 14$

quedan $\quad \Delta 23 = --\Delta 12$ y $5\,\Delta 14 + 3\,\Delta 12 -- 3\,\Delta 23 -- 5\,\Delta 35 = 0$

o sea $\quad \Delta 23 = --\Delta 12 \qquad \Delta 35 = 1.2\,\Delta 12 + \Delta 14$

por lo que solo hay dos traslaciones diferentes $\Delta 12$ y $\Delta 14$.

Con los datos que se tienen planteamos las ecuaciones de los momentos en las barras:

$M12 = -3333.333 + 0.8\,\phi 1 + 0.4\,\phi 2 + 3 \times 0.8 \times \Delta 12/(2 \times 5)$
$M21 = 3333.333 + 0.8\,\phi 2 + 0.4\,\phi 1 + 0.24\,\Delta 12$
$M23 = -3333.333 + 0.8\,\phi 2 + 0.4\,\phi 3 - 0.24\,\Delta 12$
$M32 = 3333.333 + 0.8\,\phi 3 + 0{,}4\,\phi 2 -- 0.24\,\Delta 12$
$M14 = \phi 1 + 3 \times 1 \times \Delta 14/(2 \times 4)$
$M41 = 0.5\,\phi 1 + 0.375\,\Delta 14$
$M35 = \phi 3 + 0.375\,\Delta 35 = \phi 3 + 0.45\,\Delta 12 + 0.375\,\Delta 14$
$M53 = 0.5\,O3 + 0.45\,\Delta 12 + 0.375\,\Delta 14$

Equilibrio de Nudos:

Nudo 1 = M12 +M14 =0 Nudo 2 = M21 + M23 =0 Nudo 3 = M32 + M35 = 0

Como los empujes no estan tan inmediatos sus efectos, nos ayudamos introduciendo dos incognitas auxiliares X e Y,componentes de las reacciones en un empotramiento que suponemos el izquierdo 4.

Expresamos ahora los equilibrios de los efectos en los nudos 1,2,3 y 5,con los que obtenemos siete ecuaciones,con las tres de equilibrio de nudos, que resuelven las incognitas: Asi

Momentos en Nudo 1 = M41 + M14 – 4 x X= 0
Momentos en Nudo 2 = M41 + M21 – 7 x X + 4 x Y – 3 x 400 – 5 x 2000 x 2 = 0
Momentos en Nudo 3 = M41 + M32 – 4 x X + 8 x Y + 3 x 300 – 10 x 2000 x 4 = 0
Momentos en Nudo 5 = M41 + M53 + 8 x Y +400 x 4 +300 x 7 – 10 x 2000 x 4 = 0

Eliminando las incognitas X e Y entre estas ecuaciones se obtienen las dos que son necesarias

M14 + M41 – M32 + M53 +2800 =0
2 M21 –3.5 M14 –2.5 M41 – M53 + 33900 = 0

Sustituyendo los valores de las M queda el sistema

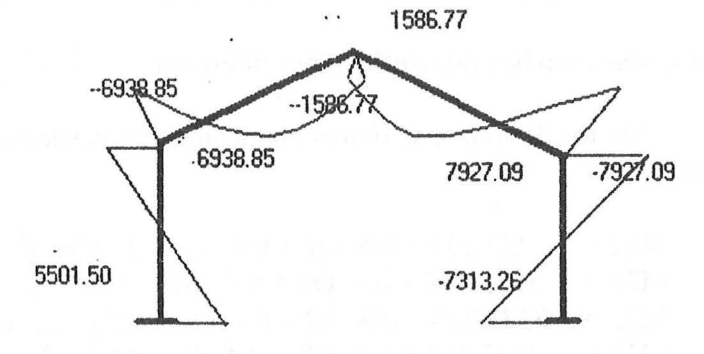
Ø1	Ø2	Ø3	Δ12	Δ14		IND.
1.8	0.4	0	0.24	0.375	=	3333.3333
0.4	1.6	0.4	0	0	=	0
0	0.4	1.8	0.21	0.375	=	-3333.3333
1.5	-0.4	-0.3	0.69	1.125	=	533.3333
3.95	-1.6	0.5	-0.03	2,625	=	40566.6666

que resuelto da Ø1 = 2874.707 Ø2 = -411.7648 Ø3 = -1227.648
Δ12 = -23919.07 Δ14 = 10837.72

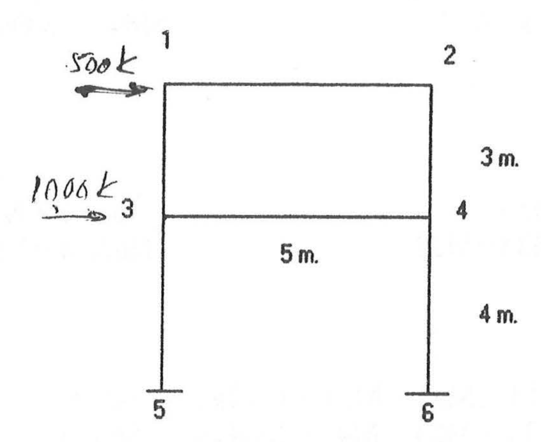
y al sustituir en las formulas de los momentos quedan

M12 = - 6938.85 mk. M23 = 1586.77 mk. M14 = 6938.85 mk. M35 = -7927.09 mk.
M21 = - 1586.77 mk. M32 = 7927.09 mk. M41 = 5501.50 mk. M53 = -7313.26 mk.

que se puede ya dibujar el diagrama de momentos de la estructura



Ejemplo num.25



Sea el portico adjunto cargado en el dintel superior con 500 k/m y 1000k/m en el inferior.Empujes horizontales en dintel 12=500 k. y en dintel 34 =1000 k.

Estudiemos la existencia de las traslaciones utilizando el Teorema de las Proyecciones

En la celula superior (1,2,4,3)

proyecciones horizontales $0.\alpha_{13} + 5.\alpha_{12} - 0.\alpha_{24} - 5.\alpha_{34} = 0$
proyecciones verticales $3.\alpha_{13} + 0\alpha_{12} - 3\alpha_{24} - 0.\alpha_{34} = 0$

que se reducen a $5.\alpha_{12} = \Delta_{12} = 5.\alpha_{34} = \Delta_{34}$
$3.\alpha_{13} = \Delta_{13} = 3\alpha_{24} = \Delta_{24}$

y el la celula inferior (3,4,6,5) el cierre se produce por el suelo de giro nulo

proyecciones horizontales $0.\alpha_{35} + 5.\alpha_{34} - 0\alpha_{46} - 5.\alpha_{56} = 0$
proyecciones verticales $4.\alpha_{35} + 0.\alpha_{34} - 4\alpha_{46} - 0.\alpha_{56} = 0$

que se reducen a $5.\alpha_{34} = \Delta_{34} = 0$
$4.\alpha_{35} = \Delta_{35} = 4\alpha_{46} = \Delta_{46}$

llegandose a la conclusion de que $\Delta_{13} = \Delta_{24} = \Delta_1$, $\Delta_{35} = \Delta_{46} = \Delta_2$, y $\Delta_{12} = \Delta_{34} = 0$ por lo que el problema solo tiene dos desplazamientos laterales,correspondientes a cada planta, cosa que intuitivamente se presentia.

Calculemos los momentos de empotramiento perfecto en

dintel superior = m12 = -- m21 = -- (500 x 5 ^2)/12 = -- 1041.6666
dintel inferior = m34 = -- m43 = -- (1000x 5^2)/12 = -- 2083.3333

Rigideces : K12=K34 = 4EI/5 = 0.8 K13=K24=4EI/3= 1.33 K35=K46=4EI/4=1
(Ver Observacion al final del Ejemplo)

Teniendo por incognitas los giros en los nudos 1,2,3,y 4 y dos traslaciones por empujes en los dinteles, tenemos las ecuaciones de los momentos en los extremos de las barras

$M12 = -1041.6 + 0.8\,\phi 1 + 0.4\,\phi 2$ $\quad$ $M21 = 1041.6 + 0.4\,\phi 1 + 0.8\,\phi 2$

$M34 = -2083.3 + 0.8\,\phi 3 + 0.4\,\phi 4$ $\quad$ $M43 = 2083.3 + 0.4\,\phi 3 + 0.8\,\phi 4$

$M13 = 1.3\,\phi 1 + 0.6\,\phi 3 + 3x1.3x\Delta\ 1/(2x3)$ $\quad$ $M31 = 0.6\,\phi 1 + 1.3\,\phi 3 + 0.6x\,\Delta 1$

$M24 = 1.3\,\phi 2 + 0.6\,\phi 4 + 0.6x\ \Delta 1$ $\quad$ $M42 = 0.6\,\phi 2 + 1.3\,\phi 4 + 0.6x\,\Delta 1$

$M35 = \phi 3 + 3x1x\ \Delta\ 2/(2x4)$ $\quad$ $M53 = 0.5\,\phi 3 + 0.375x\ \Delta\ 2$

$M46 = \phi 4 + 0.375\,x\ \Delta\ 2$ $\quad$ $M64 = 0.5\,\phi 4 + 0.375\,x\ \Delta\ 2$

Equilibrio de nudos:

Nudo 1 = M12 + M13 $\qquad$ Nudo 2 = M21 +M24

Nudo 3 = M31 + M34 +M35 $\qquad$ Nudo 4 = M42 +M43 +M46

Equilibrio de empujes

En dintel 12 $\qquad$ (M13 + M31 + M24 + M42)/3 + 500 =0

en dintel 34 $\qquad$ (M35 + M53 + M46 + M64)/4 +1500=0

1500=Suma de 500 y 1000 (de ambos dinteles)

Sustituyendo valores queda el sistema simetrico

$\phi 1$	$\phi 2$	$\phi 3$	$\phi 4$	$\Delta 12$	$\Delta 34$		I
2.133	0.4	0.666	0	0.666	0	=	1041.666
0.4	2.133	0	0.666	0.666	0	=	--1041.666
0.666	0	3.133	0.4	0.666	0.375	=	2083.333
0	0.666	0.4	3.133	0.666	0.375	=	--2083.333
0.666	0.666	0.666	0.666	0.888	0	=	--500
0	0	0.375	0.375	0	0.375	=	--1500

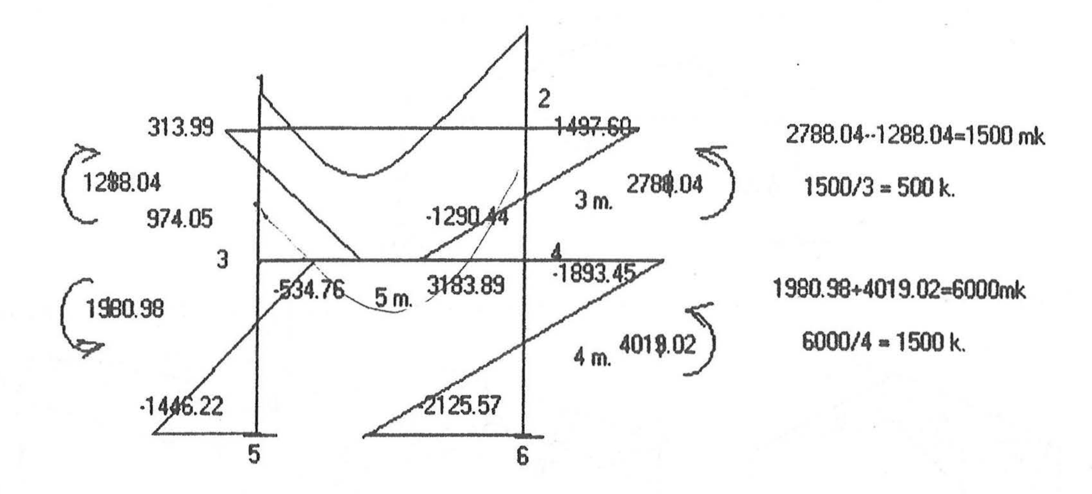
que resuelto da $\quad \phi 1 = 832.8441768 \quad \phi 2 = 153.4963 \quad \phi 3 = 1822.931$

$\phi 4 = 464.2354 \quad \Delta 12 = --3017.6302 \quad \Delta 34 = --6287.1664$

que al sustituirlos en las formulas de los momentos quedan

M12 =	--313.99 mk.	M13 =	313.99 mk.	M35 =	--534.76 mk.
M21 =	1497.60 mk.	M31 =	974.05 mk.	M53 =	1446.22 mk.
M34 =	--439.29 mk.	M24 =	--1497.60 mk.	M46 =	--1893.45 mk.
M43 =	3183.89 mk.	M42 =	--1290.44 mk.	M64 =	--2125.57mk.

con los que ya se puede dibujar los diagramas de momentos de la estructura.



Observacion: En rigor los resultados del sistema dan los giros y los desplazamientos multiplicados por EI,pero al volverlos a sustituir en las formulas de los momentos,no influye el haber prescindido de dicho producto.Claro esta que si lo que interesa es conocer dichos giros y desplazamientos habra que dividirlos por EI,teniendo cuidado con las unidades tanto de E como de I.

Los ejercicios que siguen, salvo aclaración, se desarrollan por el método de las SY.

EJERCICIO nº6

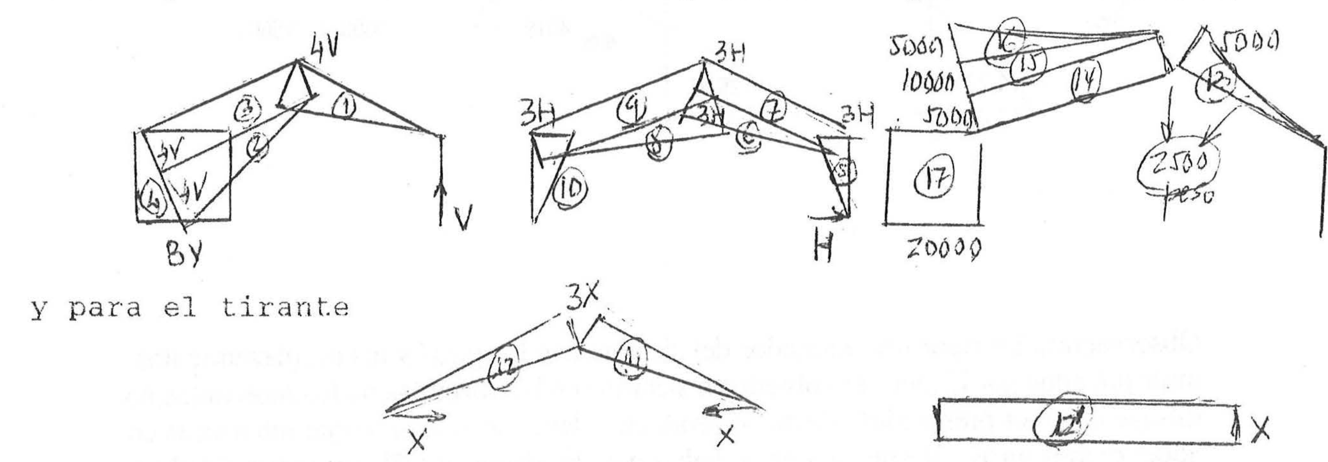
Calcular el pórtico con peso en los pares de 500 k/m.e I=800 cm4 La sección del tirante =2 cm2. Se supone el mismo E para todas las barras

5m

8m

3m

Para aplicar SY utilizamos los siguientes diagramas de momentos



y para el tirante

Así se tienen las siguientes areas y ordenadas

Nº	S	y(V=1)	y(H=1)	y(X=1)
1	10V	8/3	5	-2
2	10V	20/3	4	-1
3	20V	6	4.5	-1.5
4	24V	8	1.5	0
5	4.5H	0	2	0
6	7.5H	8/3	5	-2
7	15H	2	4.5	-1.5
8	7.5H	16/3	5	-2
9	15H	6	4.5	-1.5
10	4.5H	8	2	0
11	7.5X	-8/3	-5	2
12	7.5X	-16/3	-5	2
12a	8X(x0.04)	0	0	1
13	8333.333	-3	-5.75	2.75
14	25000	-6	-4.5	1.5
15	25000	-20/3	-4	1
16	8333.333	-7	-3.75	0.75
17	60000	-8	-1.5	0

Como los diagramas de momentos van divididos por EI y los normales del tirante por ES, al igualar los productos a cero, se puede suprimir E y al multiplicar por I queda para el área 12a

I/S = 800x10^(-8)/2x10^(-4) = 0.04

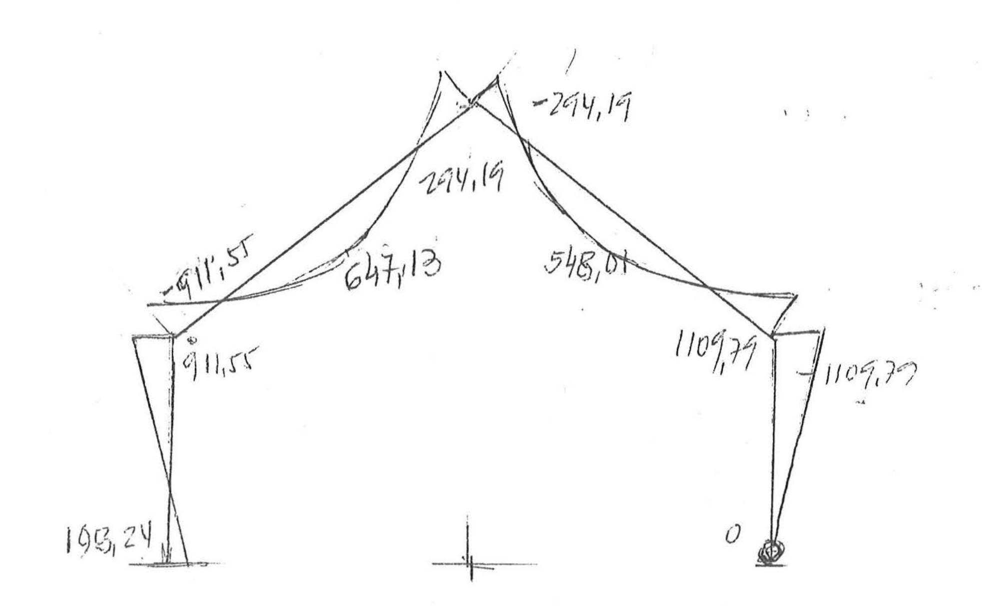
por el que se ha multiplicado 12a

Operando con el Método se obtiene el sistema

405.3333 V + 216 H − 60 X − 880000 =0
216 V + 228 H − 75 X − 381666,6=0
− 60 V − 75 H +30.32X + 91666.66=0

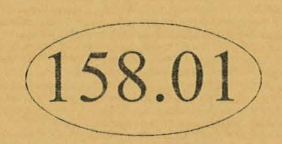
que es tanto como expresar que V y H no se mueven y que las acciones normales en el tirante en cualquier sección se equilibran.

El resultado del sistema es
V= 2524.78 k. H= −369.93 k. (contrario a lo supuesto)
y X=1057.91 k. dando un diagrama



NOTAS

CUADERNO



CATÁLOGO Y PEDIDOS EN
http://www.aq.upm.es/of/jherrera
info@mairea-libros.com

